

18. ВЕРОЯТНОСТЬ

Бросим симметричную монету тысячу раз. Предсказать, как она упадёт в очередной раз, нельзя, но орлов, скорее всего, будет примерно половина. Бросок монеты — *эксперимент*: процедура, которую можно повторять сколько угодно раз, а результат от раза к разу разный. *Событие* — утверждение о результате эксперимента: после каждого опыта можно сказать, произошло оно или нет: «выпал орёл», «на кубике выпало чётное число». Если в N повторениях эксперимента событие произошло k раз, число k/N называют *частотой* события.

У симметричного кубика грани ничем не отличаются друг от друга, поэтому в длинной серии бросков каждая грань обычно выпадает примерно в шестой части случаев. Слова «случайный выбор» («тянут наугад», «садится на случайное место») означают то же самое: в длинной серии опытов каждый вариант выбора встречается примерно одинаково часто.

1° На гранях симметричной двадцатигранной кости написаны числа от 1 до 20. Какова примерная частота выпадения **а)** простого числа; **б)** числа, делящегося на 3 или на 5?

2 Симметричный кубик бросают; если выпала шестёрка, бросок не засчитывают и кубик перебрасывают. Какова примерная частота единицы среди засчитанных бросков? А чётного числа?

Если эксперимент повторять много раз, частота события колеблется около одного и того же числа — где бы и кем бы эксперимент ни проводился. Это число называют *вероятностью* события A и обозначают $P(A)$. Это не теорема, а наблюдение о мире; на нём основана вера в то, что теорию вероятностей можно применять к реальной жизни. Слово «вероятность» используют и в других смыслах: например, говорят о вероятности единичного события, которое нельзя повторить много раз, — что определённая команда выиграет завтрашний матч. В этом листке мы говорим только о вероятности как о частоте.

Событие «произошло хотя бы одно из событий A и B » обозначают $A \cup B$, «произошли и A , и B » — $A \cap B$, « A не произошло» — $\bar{A}$; его называют *противоположным* к A . События A и B *несовместны*, если они не могут произойти одновременно.

3° а) Объясните, почему $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, если события A и B несовместны. **б)** Чему равна вероятность события, которое происходит при любом результате эксперимента? **в)** Объясните, почему $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

4° Верно ли, что $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ для любых событий A и B ? Если нет, сформулируйте верное равенство.

5° Две симметричные монеты бросают одновременно. Найдите вероятность того, что выпадут два орла; ровно один орёл.

6° Бросают два симметричных кубика, красный и синий, и складывают выпавшие числа. Какая сумма имеет наибольшую вероятность?

7° Десять школьников по очереди тянут билеты из десяти; вытянутый билет на стол не возвращают. Вася выучил один билет. Что ему выгоднее: тянуть первым или последним?

8 Восемь команд разной силы играют турнир по олимпийской системе: три круга, проигравший выбывает, в каждом матче побеждает более сильная команда. Пары первого круга определяет жеребьёвка. С какой вероятностью

а) в финале встретятся две сильнейшие команды;

б) в финал выйдет третья по силе команда?

9 За круглый стол в случайном порядке садятся 10 мальчиков и 10 девочек, среди них Маша.

а)° С какой вероятностью справа от Маши сидит мальчик?

б) С какой вероятностью оба её соседа — мальчики?

10 Жук сидит в вершине проволочного каркаса куба. Каждую минуту он переползает по ребру в одну из трёх соседних вершин, выбирая её случайно. С какой вероятностью

а) через 3 минуты он окажется в вершине, противоположной исходной;

б) через 4 минуты он снова окажется в исходной вершине?

- 11** С какой вероятностью ни разу не выпадут два орла подряд, если монету бросают
- а) 4 раза;
- б) 10 раз?
- 12** На выборах бюллетени вынимают из урны по одному в случайном порядке и сразу подсчитывают. С какой вероятностью в какой-то момент подсчёта у кандидатов А и Б окажется поровну голосов, если
- а) за А подано 3 голоса, а за Б — 2;
- б*) за А подано 30 голосов, а за Б — 20?
- 13** Каждое из чисел 1, 2, ..., 8 красят в красный или синий цвет, бросая для каждого числа симметричную монету.
- а)° Что вероятнее: сумма красных чисел больше суммы синих или меньше?
- б) Найдите вероятность того, что сумма красных чисел больше.
- 14**° В урне 3 белых и 2 чёрных шара. Их вынимают наугад по одному, пока не появится белый. С какой вероятностью придётся вынуть не меньше трёх шаров?
- 15** Игра состоит из партий; в каждой партии каждая из сторон выигрывает с вероятностью $1/2$, ничьих не бывает. Если игру прервали, приз делят в отношении вероятностей победы, которые были у сторон в момент остановки.
- а)° Тимофей и Витя играли до трёх выигранных партий и прервали игру при счёте 2:1. Как им разделить приз?¹
- б) Команды Знатоков и Телезрителей играют до шести побед. Сейчас счёт 2:4 в пользу Телезрителей. С какой вероятностью победят Телезрители?
- 16** Аня бросает $n + 1$ симметричную монету, а Боря — n монет. С какой вероятностью у Ани выпадет больше орлов, чем у Бори?

Вероятностная модель эксперимента — это конечное множество Ω и числа $p(\omega) \geq 0$, по одному для каждого $\omega \in \Omega$, в сумме равные 1. Элементы Ω — *элементарные исходы*: несовместные события, из которых при каждом проведении эксперимента происходит ровно одно; $p(\omega)$ — их вероятности. Событию отвечает подмножество $A \subset \Omega$, и $P(A)$ — сумма $p(\omega)$ по всем $\omega \in A$. Один эксперимент можно описать разными моделями; если обе правильно описывают эксперимент, то вероятность события в обеих моделях одна и та же.

- 17**[†] Докажите, исходя из определения модели: а) $P(\Omega) = 1$ и $P(\emptyset) = 0$; б) если $A \subset B$, то $P(A) \leq P(B)$; в) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$; г) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- 18** а) Опишите вероятностные модели экспериментов из задач 6 и 10: что такое Ω и чему равны $p(\omega)$? б) Для задачи 9 постройте две модели: в первой элементарный исход — рассадка всех двадцати человек, во второй — пара «кто сидит слева от Маши, кто справа». Сколько исходов в каждой модели? Найдите в обеих ответ на вопрос 9б.
- 19**° Бросают две одинаковые монеты. Петя рассуждает так: исходов три — два орла, две решки, орёл и решка, — значит, монеты упадут по-разному с вероятностью $1/3$. Вася насчитал четыре исхода и получил $1/2$. Кто прав? В чём ошибка другого?
- 20** Можно ли нагрузить две монеты так, чтобы вероятности выпадения «орла» и «решки» были разные, а вероятности выпадения любой из комбинаций «решка, решка», «орел, решка», «орел, орел» были бы одинаковы?
- 21** Десять человек, среди них Петя и Вася, садятся в случайном порядке а) в ряд; б) за круглый стол. С какой вероятностью между Петей и Васей сидят ровно k человек (за столом — с одной из сторон)?
- 22** За круглый стол в случайном порядке садятся 4 мальчика и 4 девочки. С какой вероятностью их можно разбить на 4 пары соседей так, чтобы в каждой паре были мальчик и девочка?
- 23*** Каждый из n пассажиров купил билет на n -местный самолёт. Первой вошла рассеянная старушка и села на случайное место. Каждый следующий пассажир садится на своё место, если оно свободно, а если занято — на случайное свободное. С какой вероятностью последний пассажир сядет на своё место?

¹Задачу о разделе приза в прерванной игре обсуждали в 1654 году в переписке Блез Паскаль и Пьер Ферма. Эту переписку считают началом теории вероятностей.