

18. ВЕРОЯТНОСТЬ

Бросим симметричную монету тысячу раз. Предсказать, как она упадёт в очередной раз, нельзя, но орлов, скорее всего, будет примерно половина. Бросок монеты — *эксперимент*: процедура, которую можно повторять сколько угодно раз, а результат от раза к разу разный. *Событие* — утверждение о результате эксперимента: после каждого опыта можно сказать, произошло оно или нет: «выпал орёл», «на кубике выпало чётное число». Если в N повторениях эксперимента событие произошло k раз, число k/N называют *частотой* события.

У симметричного кубика грани ничем не отличаются друг от друга, поэтому в длинной серии бросков каждая грань обычно выпадает примерно в шестой части случаев. Слова «случайный выбор» («тянут наугад», «садится на случайное место») означают то же самое: в длинной серии опытов каждый вариант выбора встречается примерно одинаково часто.

- 1** Симметричный кубик бросают много раз. Какова примерная частота выпадения
- а) шестёрки; б) чётного числа; в) числа, делящегося на 3;
- г) числа, не делящегося ни на 2, ни на 3?
- 2** а) Каждый урок геометрии Наталия Павловна случайно выбирает одного из учеников вашего класса и просит стереть с доски. С какой частотой Андрей стирает с доски на уроке геометрии?
- б) Что влияет на эту частоту (кроме обыкновения Наталии Павловны просить одних учеников стирать с доски чаще, чем других)?
- 3** а) В пруду обитают караси двух видов. Выловили 40 карасей. Оказалось, что 12 из них первого вида. Какой прогноз о доле карасей первого вида среди обитающих в пруду карасей вы можете сделать?
- б) Ихтиолог Сева выловил k карасей, прикрепил к их плавнику метку, а потом выпустил их обратно в пруд. На следующий день он выловил N карасей и n из них оказались с меткой. Какой вывод можно сделать в результате этого исследования?

Если эксперимент повторять много раз, частота события колеблется около одного и того же числа — где бы и кем бы эксперимент ни проводился. Это число называют *вероятностью* события A и обозначают $P(A)$. Это не теорема, а наблюдение о мире; на нём основана вера в то, что теорию вероятностей можно применять к реальной жизни. Слово «вероятность» используют и в других смыслах: например, говорят о вероятности единичного события, которое нельзя повторить много раз, — что определённая команда выиграет завтрашний матч. В этом листке мы говорим только о вероятности как о частоте.

Событие «произошло хотя бы одно из событий A и B » обозначают $A \cup B$, «произошли и A , и B » — $A \cap B$, « A не произошло» — $\bar{A}$; его называют *противоположным* к A . События A и B *несовместны*, если они не могут произойти одновременно.

- 4** Монету бросили 10 раз. Какова вероятность того, что
- а) 10 раз выпал орёл;
- б) сначала выпало 5 орлов, а затем 5 решек;
- в) выпало 5 орлов и 5 решек (в любом порядке)?
- 5** Подбрасывают два кубика — синий и зелёный. С какой вероятностью получится, что
- а) на синем выпало чётное число, а на зелёном 1 или 6?
- б) сумма очков на двух кубиках равна 5?
- 6** В шляпе лежат карточки со словами: 10 с надписью «дуб», 5 с надписью «зуб», 15 с надписью «куб» и 20 с надписью «зубр». Вытаскивают одну случайную карточку. Рассмотрим события:
- A = «слово заканчивается на букву «б»»
- B = «слово начинается на букву «з»»
- C = «в слове есть буква «у»»
- D = «слово начинается на букву «б»». Верны ли утверждения:
- а) $P(C) + P(D) = P(C \cup D)$; б) $P(A) + P(B) = P(A \cup B)$.

- ☐ **7** ☐ а)° Объясните, почему $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, если события A и B несовместны.
- ☐ **б)** Чему равна вероятность события, которое происходит при любом результате эксперимента?
- ☐ **в)** Объясните, почему $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.
- ☐ **8°** Верно ли, что $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ для любых событий A и B ? Если нет, сформулируйте верное равенство.
- ☐ **9** Вероятность события A равна $1/3$, вероятность события B равна $1/2$, вероятность события «произошло событие A или событие B » равна $2/3$. Как такое возможно? Придумайте пример эксперимента и событий, для которых будут такие вероятности.
- ☐ **10** В классе 25 детей. Для дежурства наугад выбирают двоих. Вероятность того, что оба дежурных окажутся мальчиками, равна $3/25$. Сколько в классе девочек?

Вероятностная модель эксперимента — это конечное множество Ω и числа $p(\omega) \geq 0$, по одному для каждого $\omega \in \Omega$, в сумме равные 1. Элементы Ω — *элементарные исходы*: несовместные события, из которых при каждом проведении эксперимента происходит ровно одно; $p(\omega)$ — их вероятности. Событию отвечает подмножество $A \subset \Omega$, и $P(A)$ — сумма $p(\omega)$ по всем $\omega \in A$. Один эксперимент можно описать разными моделями; если обе правильно описывают эксперимент, то вероятность события в обеих моделях одна и та же.

- ☐ **11[†]** Докажите, исходя из определения модели: **а)** $P(\Omega) = 1$ и $P(\emptyset) = 0$; **б)** если $A \subset B$, то $P(A) \leq P(B)$; **в)** $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$; **г)** $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- ☐ **12** Каждый ученик подбрасывает один кубик, одну монетку и вытаскивает из мешка с полным набором домино одну из доминошек. Постройте вероятностную модель этого эксперимента. Что будет элементарным исходами? Сколько элементарных исходов в этой модели? Чему равны их вероятности? Приведите пример пары несовместных событий в этой модели, а также пример пары противоположных событий.
- ☐ **13** С какой вероятностью в предыдущей задаче выпадет орёл? Можно ли было для ответа на этот вопрос построить другую вероятностную модель?
- ☐ **14** Почтальон Печкин бросает монетку. Если выпал орёл, бросает монетку ещё два раза. Если оба раза выпадет решка, идёт на работу пешком, а иначе едет на велосипеде. Если выпадает решка, бросает кубик. Если выпадает 5 или 6, идёт пешком, иначе едет на автобусе. Если Печкин едет на велосипеде, то с вероятностью 70% успевает развезти все письма во время, а если идёт пешком — то с вероятностью 40%.
- ☐ **а)** Постройте вероятностную модель.
- ☐ **б)** Придумайте какое-нибудь событие для этого эксперимента и предложите однокласснику найти его вероятность.
- ☐ **в)** Найдите вероятность события в этом эксперименте, придуманного кем-нибудь из ваших одноклассников.