



Плоские графы $\alpha + \chi$



Тор

Граф называют *плоским*, если он нарисован на плоскости так, что разные вершины не совпадают, а рёбра пересекаются только в концах. Если граф можно нарисовать на плоскости без самопересечений, но не выбран конкретный способ это сделать, граф называют *планарным*. *Гранями* плоского графа называются куски, на которые его рёбра разбивают плоскость. **Формула Эйлера.** Если в связном плоском графе V вершин, P рёбер и F граней, то $V - P + F = 2$

1. Проверьте формулу Эйлера для всех правильных многогранников: тетраэдра, куба, октаэдра, икосаэдра и додекаэдра (на картинке в этом порядке).

2. Докажите формулу Эйлера для а) дерева; б) произвольного связного плоского графа

4. Докажите формулу Эйлера для выпуклых многогранников.

Сфера с двумя ручками (крендель)

11. Как деформировать эластичную поверхность чашки в поверхность бублика? Нельзя рвать и склеивать, но можно растягивать и сжимать

3. Докажите формулу Эйлера для графов на сфере.

6. Докажите для простых плоских графов: а) $2P \geq 3F$ при $F \geq 2$; б) $P \leq 3V - 6$ при $V \geq 3$.

7. Докажите, что а) полный граф с пятью вершинами; б) полный двудольный граф с тремя вершинами в каждой доле непланарны.

12. а) Нарисуйте на торе (поверхности бублика или, что то же самое, чашески) граф, у которого каждую грань можно распрямить и получится плоская фигура без дырок. Чему равно $V - P + F$? б) Докажите, что для остальных таких графов на торе $V - P + F$ равно тому же. Подсказка: *поверхность от хитицилемзи и ерот мондо ан афарг авд етйусиран* (морбер с унишрев юувон или (орбер еовон инарг иртуне итсеворп или унишрев юувон ербер ан ьтиватсон илсе ,ястеем ен $F + P - V$ отч етьреворп

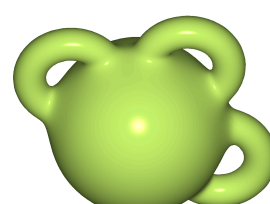
5. Нарисуйте для правильных многогранников двойственные графы. Каким многогранникам они соответствуют?

8. Докажите, что в любом простом плоском графе есть вершина, степень которой меньше 6.

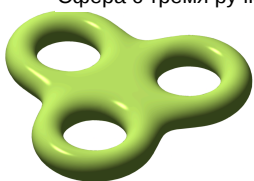
9. Докажите, что плоскую карту можно покрасить в 6 цветов так, что страны, имеющие общий участок границы, были разного цвета.

14. Придумайте и докажите аналог формулы Эйлера для графов на кренделе --- сфере с двумя ручками.

15. Слева даны две фигуры. Как деформировать поверхность одной из них в поверхность другой?



Сфера с тремя ручками



Сфера с тремя ручками

16. А на сфере с g ручками?

13. Можно ли нарисовать на торе полный граф с а) 5; б) 6; в) 7; г) 8 вершинами без самопересечений?

10. То же, но в 5 цветов

Двойственный граф G' к планарному графу G — это граф, в котором вершины соответствуют граням графа G ; две вершины соединены ребром если и только если соответствующие им грани графа G имеют общее ребро.

