

16α. ДЕРЕВЬЯ

Деревом называют связный граф без циклов.

- 1° ☐ Два графа *изоморфны*, если вершины одного можно занумеровать вершинами другого так, что рёбра перейдут в рёбра. Сколько существует попарно неизоморфных деревьев на шести вершинах? Нарисуйте их.
- 2[†] ☐ Вершину степени 1 называют *висячей*, или *листом*. Докажите, что в дереве, у которого больше одной вершины, есть висячая вершина, и что таких вершин хотя бы две.
- 3[†] ☐ Докажите, что в дереве с n вершинами ровно $n - 1$ ребро.
- 4° ☐ Сколько рёбер в *лесе* — графе без циклов — с n вершинами и k компонентами связности?
- 5[†] ☐ Докажите, что из любого связного графа можно выкинуть часть рёбер так, чтобы получилось дерево с теми же вершинами. Такое дерево называют *остовом*, или *остовным деревом*, графа.
- 6° ☐ В графе n вершин и m рёбер. Докажите, что компонент связности в нём не меньше $n - m$.
- 7[†] ☐ Пусть граф *связен* и имеет n вершин. Докажите, что следующие свойства равносильны:
- рёбер ровно $n - 1$;
 - при удалении любого ребра граф перестаёт быть связным;
 - в графе нет циклов;
 - любые две вершины соединены ровно одним путём.
- Таким образом, любое из этих свойств можно взять за определение дерева.

* * *

- 8° ☐ Даны n различных по весу камней и весы, позволяющие сравнить любые два из них. Какое наименьшее число взвешиваний нужно, чтобы наверняка найти самый тяжёлый камень?
- 9 ☐ Сколько рёбер может быть в несвязном графе с n вершинами?
- 10° ☐ Докажите, что из любого связного графа, в котором больше одной вершины, можно удалить вершину вместе со всеми выходящими из неё рёбрами так, что граф останется связным.
- 11 ☐ В связном графе 10 вершин и 19 рёбер. Докажите, что в нём найдётся цикл, после уничтожения всех рёбер которого граф не потеряет связность.
- 12 ☐ В стране 100 городов, некоторые из которых соединены авиалиниями. Известно, что из любого города можно долететь до любого другого, возможно с пересадками. Докажите, что можно побывать в каждом городе, совершив не более 198 перелётов.
- 13 ☐ Дано дерево с n вершинами. Сколькими способами можно раскрасить его вершины в k цветов так, чтобы концы любого ребра были разного цвета?
- 14 ☐ Выпуклый n -угольник разрезали на треугольники непересекающимися диагоналями.
- ☐ а)° Докажите, что треугольников получилось на один больше, чем проведённых диагоналей.
- ☐ б)° Докажите, что хотя бы у двух треугольников по две стороны лежат на границе многоугольника.
- ☐ в)* Сколькими способами можно так разрезать многоугольник? Вершины занумерованы: разрезания, отличающиеся поворотом, считаются различными.
- 15* ☐ Хозяйка испекла пирог и знает, что придут либо ровно p , либо ровно q гостей, причём p и q взаимно просты. На какое наименьшее число не обязательно равных кусков можно разрезать пирог, чтобы в любом случае разделить его между гостями поровну?