

3Д. FUNNY GAMES

- ☐ **1** ☐ а) Чётова и Нечётов одновременно пишут по целому числу. Если произведение чётно, победителем объявляют Чётову, если нечётно, то Нечётова. Может ли один из игроков играть так, чтобы непременно выиграть, как бы ни играл второй игрок?
- ☐ б) А если заменить произведение на сумму?
- ☐ в) А если они пишут числа по очереди?
- ☐ **2** Двое играют в крестики-нолики в кубе $3 \times 3 \times 3$, стремясь поставить три своих знака на одной прямой. Кто выигрывает при правильной игре и как он должен играть?
- ☐ **3** У первого игрока есть неограниченный запас картонных квадратов 2×2 клетки, а у второго — уголков из трёх клеток. Они по очереди ставят свои фигуры на свободные клетки шахматной доски. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?
- ☐ **4** На бесконечной в обе стороны прямой дороге стоит полицейский участок. Некоторое время назад из него на машине уехали преступники. У полицейских есть машина, которая едет в 2 раза быстрее, но они не знают, когда уехали преступники и в какую сторону поехали. Смогут ли полицейские гарантированно поймать преступников?
- ☐ **5** На доске написаны числа 25 и 36. За ход разрешается дописать ещё одно натуральное число — разность любых двух написанных на доске чисел, если она ещё не встречалась. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.
- ☐ **6** Пять пиратов делят 100 монет. Самый свирепый пират предлагает способ поделить монеты, после этого все голосуют, принимают они этот способ или нет. Если большинство за, они так и делят монеты. Если нет — самого свирепого пирата выбрасывают за борт. После этого самый свирепый из оставшихся предлагает способ разделить монеты и происходит всё то же самое (если половина за, а половина против, способ разделить монеты принимается). И так далее. В частности, если останется один пират, он заберёт все монеты. Сколько монет получит самый свирепый пират при оптимальной стратегии всех игроков?
- ☐ **7** В куче 100 монет по одному евро. Два игрока ходят по очереди, каждый может своим ходом взять одну или две монеты. Если игрок берёт одну монету, ход переходит к другому игроку, а если две, то игра заканчивается, и оставшиеся в куче монеты выбрасывают. Каждый игрок хочет получить как можно больше денег. Как им действовать?
- ☐ **8** Вы хотите купить картину на аукционе. Аукцион устроен так: все сдают конверты со ставками, затем тот, кто написал наибольшую ставку, получает картину, при этом платит вторую по убыванию ставку. Вы считаете, что истинная стоимость картины — 1000 долларов, то есть если вы заплатите за неё x долларов, то будете считать, что выиграли $1000 - x$ долларов. А если, например, вы купите картину за 1000 долларов, то вы будете столь же счастливы, как если бы не покупали картину. Какую ставку вам нужно сделать?
- ☐ **9** ☐ а) Макс разрезает чизкейк на два куска, Мин разрезает один из кусков (по своему выбору) на два, получается всего три куска. Эти три куска по очереди (выбирая любой из оставшихся кусков) забирают Макс, Мин и снова Макс. Каждый игрок хочет получить побольше чизкейка. Формально говоря, результат игры — сумма частей, доставшихся Макс. Для каждого игрока нужно выяснить, какое наибольшее количество чизкейка он может себе гарантировать.
- ☐ б) А если они режут чизкейк по очереди до тех пор, пока не будет пять кусков?
- ☐ **10** ☐ а) Обезьяна хочет определить, из окна какого самого низкого этажа 15-этажного дома нужно бросить кокосовый орех, чтобы он разбился. Сколько бросков потребуется обезьяне, чтобы гарантированно удовлетворить свое любопытство, если у нее есть два ореха (орехи одинаковые по своим ударопрочным характеристикам)?
- ☐ б) А если у неё k орехов?
- ☐ **11** Два игрока играют на графе. Первым своим ходом каждый игрок может выбрать любую свободную вершину, а каждым следующим ходом — только такую свободную вершину, которая соединена ребром хотя бы с одной из вершин, уже занятых этим игроком. Если доступных для хода вершин у игрока нет, он прекращает участие в игре, при этом второй игрок может продолжать ходить,

12 Петя и Вася независимо друг от друга разбивают шахматную доску на доминошки. Затем они сравнивают полученные разбиения, и Петя платит Васе столько рублей, сколько доминошек в этих двух разбиениях совпали (оказались на одинаковых позициях). Какую наибольшую сумму выигрыша может гарантировать себе Вася независимо от действий Пети?

14 Система укреплений состоит из блиндажей. Некоторые из блиндажей соединены траншеями, причём из каждого блиндажа можно перебежать в какой-нибудь другой. В одном из блиндажей спрятался пехотинец. Пушка может одним выстрелом накрыть любой блиндаж. В каждом промежутке между выстрелами пехотинец обязательно перебегает по одной из траншей в соседний блиндаж (даже если по соседнему блиндажу только что стреляла пушка, пехотинец может туда перебежать). Назовём систему надёжной, если у пушки нет гарантированной стратегии поражения пехотинца (то есть такой последовательности выстрелов, благодаря которой пушка поразит пехотинца независимо от его начального местонахождения и последующих передвижений).

в) Не читайте, пока не решите пункт б! ?анжѣдан ен волкиц зеб йинелперку аметсис
ил яабюЛ

☐ б) Верно ли это, если граф может быть бесконечным (степени вершин также могут быть бесконечными) но при этом гарантированно, что при любых действиях игроков игра завершится за конечное число ходов?

16* Петя красит каждую клетку доски $2m \times 2n$ в чёрный или белый цвет так, чтобы клетки каждого цвета образовывали многоугольник. Затем Вася разрезает доску на доминошки (прямоугольники из двух клеток). Петя стремится к тому, чтобы в итоге получилось как можно больше двухцветных доминошек, а Вася — к тому, чтобы их получилось как можно меньше. Наличие какого наибольшего числа двухцветных доминошек может гарантировать Петя, как бы ни действовал Вася? (Напомним, что граница многоугольника — замкнутая ломаная без самопересечений.)