

15. БЕСКОНЕЧНОСТЬ

В этом листке можно решать задачи в любом порядке и выбирать те, которые вам нравятся.

1° В некоторой бесконечной Вселенной проходит межгалактический математический конгресс, на который съехалось бесконечное количество математиков и все они заселились в бесконечный отель. Все комнаты в отеле занумерованы всеми натуральными числами.

☐ **а)** Оказалось, что один математик опоздал. Можно ли его заселить в полностью заполненный отель? Учтите, что математики — интроверты, и отказываются жить более, чем по одному человеку в комнате. Но они не против переехать в другой номер.

☐ **б)** А можно ли заселить 179 опоздавших математиков?

☐ **в)** На этом проблемы у отеля не закончились: приехал целый бесконечный автобус с математиками (аналогично отелю, в бесконечном автобусе все места занумерованы всеми натуральными числами). Можно ли заселить в этот полностью заполненный отель бесконечность математиков из этого автобуса? Учтите, что применять идею из предыдущей задачи не выйдет — потребуется бесконечно много времени, конгресс уже закончится.

☐ **г)** А если приехало несколько таких автобусов?

☐ **д)** Как заселить в бесконечный пустой отель математиков из бесконечного поезда, состоящего из бесконечных вагонов? Учтите, что если вы целиком заселите первый вагон, то отель будет полностью заполнен.

☐ **е)** А из бесконечного парова, в котором бесконечное количество бесконечных поездов из бесконечных вагонов?

☐ **ж)** А из бесконечного космического корабля, в котором бесконечное количество таких бесконечных паров, в каждом из которых бесконечное количество бесконечных поездов из бесконечных вагонов?

☐ **з*)** А если пришло бесконечное количество математиков, имена которых — бесконечные последовательности из нулей и единиц, причём для каждой последовательности есть ровно один математик, которого так зовут?

☐ **2** Ровно за минуту до Нового года Дед Мороз кладёт Васе под ёлку одну за другой 10 конфет, за полминуты до Нового года кладёт ещё 10 конфет (тоже по очереди), за четверть минуты — так же кладёт ещё 10, и так далее до бесконечности. Баба Яга за полминуты до Нового года съедает конфету, которую Дед Мороз положил первой, за четверть минуты до Нового года съедает конфету, которую Дед Мороз положил второй, и т.д. Сколько конфет будет под ёлкой в Новый год?

☐ **3** В ящике A бесконечное число орехов, они пронумерованы натуральными числами. Ящики B и C пусты. Берут 10 орехов из ящика A , перекладывают их в ящик B , после чего берут один орех из ящика B и перекладывают его в ящик C . Сколько орехов может оказаться в каждом из ящиков после бесконечного числа таких действий?

☐ **4** Число вкладчиков МегаБанка бесконечно, они пронумеровано натуральными числами. Каждый вложил хотя бы 1 рубль. Докажите, что деньги можно перераспределить между вкладчиками так, чтобы у каждого стало не менее 1000000 рублей.

☐ **5** Докажите, что в любой бесконечной десятичной дроби можно так переставить цифры, что полученная дробь станет периодической (возможно, с предпериодом).

☐ **6** В некоей Думе ☐ **а)** конечное; ☐ **б)** бесконечное число депутатов. Каждый депутат дал пощёчину ровно одному другому депутату, причём каждый депутат получил ровно одну пощёчину. Докажите, что Думу можно разбить на три палаты, внутри каждой из которых никто никого не бил.

☐ **в)** Решите предыдущие пункты, если каждый депутат дал ровно одну пощёчину, а получил не более одной.

☐ **7** Теперь в думе две палаты, каждый дал пощёчину депутату из другой палаты и получил не более одной пощёчины. Пощёчин внутри палат не было. Докажите, что можно разделить всех депутатов на пары так, что в паре один из депутатов дал пощёчину другому.

8 Человечество бессмертно и начинает свою историю от Евы, а каждый человек — смертен. Обязательно ли найдётся бесконечная цепочка, начинающаяся с Евы, в которой каждый следующий человек — ребёнок предыдущего, если у каждого человека

☐ а) конечное; ☐ б) возможно, бесконечное число детей.

9 Дано бесконечное множество M слов из букв 0 и 1. Обязательно ли найдётся бесконечное слово, у которого

☐ а) есть бесконечное количество начал, лежащих в M ;

☐ б) любое начало которого лежит в M ?¹

10* Клетки бесконечной клетчатой плоскости окрашены в 2 цвета. Найдётся ли бесконечное множество вертикалей и бесконечное множество горизонталей, на пересечении которых все клетки будут одного цвета?

11 Можно ли замостить плоскость

☐ а) квадратами, среди которых ровно два одинаковых;

☐ б) квадратами, среди которых нет одинаковых. Можно использовать то, что квадрат можно замостить квадратами, среди которых нет одинаковых.

12 В этой задаче разрешается поворачивать фигуры, накладывая их друг на друга.

☐ а) Существуют ли такие 100 прямоугольников, что ни один из них нельзя покрыть остальными 99-ю?

☐ б) Существует ли бесконечно много таких прямоугольников, что ни один из них нельзя покрыть никаким конечным набором остальных?

☐ в) Существует ли бесконечно много таких прямоугольников, что ни один из них нельзя покрыть остальными?

13 В бесконечной последовательности бумажных прямоугольников площадь n -го прямоугольника равна n^2 . Всегда ли ими можно покрыть ими плоскость? Наложения допускаются.

14 Можно ли покрыть плоскость

☐ а) конечным количеством полос;

☐ б) конечным количеством внутренностей парабол;

☐ в) бесконечным числом внутренностей парабол, которые пронумерованы натуральными числами?

15 Даны две бесконечные вправо полуполосы одинаковой ширины с такими левыми границами, как на рисунке. Разрежьте одну из них на две части, из которых можно сложить вторую.

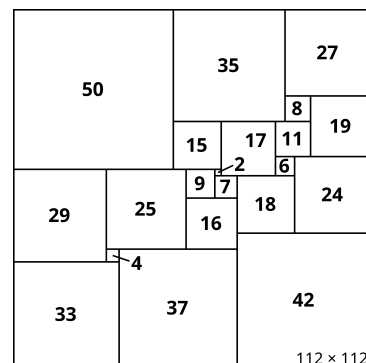


16* Можно ли раскрасить все точки квадрата и круга в чёрный и белый цвета так, чтобы множества белых точек этих фигур были подобны друг другу и множества чёрных точек также были подобны друг другу (возможно с различными коэффициентами подобия).

17* Из клетчатой плоскости вырезаны некоторые клетки. Для любого конечного набора оставшихся клеток часть плоскости можно замостить доминошками так, чтобы все клетки этого набора были покрыты доминошками. Верно ли, что тогда и всю плоскость можно замостить доминошками?

18* Два джигна по очереди выписывают цифры бесконечной десятичной дроби. Первый своим ходом приписывает в хвост любое конечное число цифр, второй — одну. Если в итоге получится периодическая дробь, выигрывает первый, иначе — второй. Кто выиграет при правильной игре?

19* Дано бесконечно много квадратов. Всегда ли ими можно покрыть плоскость (наложения допускаются), если известно, что для любого числа N найдётся конечное число квадратов суммарной площади больше N ?



¹Подумайте, как эта задача связана с предыдущей.