

13. ОСТАТКИ

Основано на листке С.А. Дориченко и его команды.

Обязательно сдать все задачи с кружочком и ещё хотя бы 12 пунктов.

Определение 1. Пусть a и m — целые числа, $m \neq 0$. Разделить a на m с остатком значит найти такие целые числа k (частное) и r (остаток), что $a = km + r$ и $0 \leq r < |m|$.

1° Числа a и b — целые, $b > 0$. Отметим на числовой прямой все числа, кратные b . Они разобьют прямую на отрезки длины b . Точка a лежит на одном из них. Пусть kb — левый конец этого отрезка. Докажите, что k — частное, а $r = a - kb$ — остаток от деления a на b .

2 Найдите частные и остатки от деления:

а) 2018 на 23; б) -17 на 4; в) $n^2 - n + 1$ на n при каждом n .

Определение 2. Говорят, что a сравнимо с b по модулю m , если $m \mid (a - b)$. Обозначение: $a \equiv b \pmod{m}$. (Например, $29 \equiv -1 \pmod{6}$, $9N \equiv 2N \pmod{7}$ при натуральном N , и т.п.)

3° Докажите, что $a \equiv b \pmod{m}$ если и только если у a и b одинаковые остатки от деления на m .

4 Могут ли среди m последовательных целых чисел какие-то два иметь равные остатки от деления на m ?

5° Пусть $a \equiv b \pmod{m}$, $c \equiv d \pmod{m}$. Докажите, что сравнения по одному и тому же модулю

а) можно складывать и вычитать: $a + c \equiv b + d \pmod{m}$, $a - c \equiv b - d \pmod{m}$;

б) можно перемножать: $ac \equiv bd \pmod{m}$;

в) можно возводить в натуральную степень n : $a^n \equiv b^n \pmod{m}$;

г) можно домножать на любое целое число k : $ka \equiv kb \pmod{m}$.

6° Верно ли, что если $ka \equiv kb \pmod{m}$ и $k \not\equiv 0 \pmod{m}$, то $a \equiv b \pmod{m}$?

7 Найдите все возможные остатки от деления квадрата целого числа на 7.

8 Найдите остаток от деления

а) числа $1 + 31 + 331 + \dots + 3333333331$ на 3;

б) 6^{100} на 7;

в) $2026 \cdot 2027 \cdot 2028 - 2026^3$ на 7.

9 Найдите остаток от деления числа $1 - 11 + 111 - 1111 + \dots - 1111111111$ на 9.

10 Докажите, что $6 \mid (n^3 - n)$ при любом целом n .

11 Найти остатки от деления на 3 чисел $2N$, $100N$, 2^N , 100^N , 2007^N (ответ зависит от N).

12 а)° Докажите, что $10^n \equiv 1 \pmod{9}$, не используя признаки делимости.

б)° Выведите из пункта (а), что число сравнимо со своей суммой цифр по модулям 3 и 9.

в)° Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для 11.

13 Найдите остаток от деления

а) $10!$ на 11;

б) $11!$ на 12.

14 а) Какой цифрой оканчивается 8^{18} ?

б) При каких натуральных k число $2^k - 1$ кратно 7?

15 Найдите три последние цифры числа 1999^{2000} .

- 16** Докажите, что
- а) $30^{99} + 61^{100}$ делится на 31;
- б) $43^{95} + 57^{95}$ делится на 100.
- 17** Числа x и y целые, причем $x^2 + y^2$ делится на 3. Докажите, что и x , и y делятся на 3.
- 18** Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых как сумма трёх или менее точных квадратов.
- 19** Даны 20 целых чисел, ни одно из которых не делится на 5. Докажите, что сумма двадцатых степеней этих чисел делится на 5.
- 20** Какие целые числа дают при делении на 3 остаток 2, а при делении на 5 — остаток 3?
- 21** Сколько есть способов записать 2018 как сумму натуральных слагаемых, любые два из которых равны или различаются на 1? (Способы лишь с разным порядком слагаемых считаем равными.)
- 22** Докажите, что из любых 52 целых чисел всегда можно выбрать два таких числа, что
- а) их разность делится на 51;
- б) их сумма или разность делится на 100.
- 23** Докажите, что из любых n целых чисел всегда можно выбрать несколько, сумма которых делится на n (или одно число, делящееся на n).
- 24** В каких строках треугольника Паскаля все числа нечётные?
- 25*** а) Докажите, что для любого натурального N существует делящееся на N натуральное число, все цифры которого только 0 и 1.
- б) Найдётся ли такое число вида $1 \dots 10 \dots 0$? Найдётся ли натуральное число, все цифры которого только 0 и 1, делящееся на 2007?
- 26*** Шайка из K разбойников отобрала у купца мешок с N монетами. Каждая монета стоит целое число грошей. Оказалось, что какую монету ни отложи, оставшиеся монеты можно поделить между разбойниками так, что каждый получит одинаковую сумму. Докажите, что $N - 1$ делится на K .