

12. ДЕЛИМОСТЬ

Определение 1. Пусть n и k — целые числа, $k \neq 0$. Говорят, что n делится на k , если найдётся такое целое m , что $n = k \cdot m$. Обозначение: $k \mid n$. Говорят также, что n кратно k или что k делит n ($k \mid n$).

Определение 2. Через $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_0}$ будем обозначать число, в десятичной записи которого первая цифра равна a_n , вторая — a_{n-1} , ..., последняя — a_0 .

1 В тройном королевстве имеют хождение только монеты по 9 золотых и по 15 золотых. Докажите, что такими монетами нельзя уплатить сумму в 50 золотых, ни без сдачи, ни со сдачей.

2° Верно ли, что

- а) если $k \mid n$ и $n \mid k$, то $n = k$;
- б) если $a \mid b$ и $b \mid c$, то $a \mid c$;
- в) если $a \mid b$ и $a \mid c$, но $a \nmid d$, то $a \mid b + c$, но $a \nmid b + d$;
- г) если a и b не делятся на c , то ab не делится на c^2 ;
- д) если $a \nmid b$ и $a \nmid c$, то $a \nmid b + c$;
- е) если $a \mid bc$, то $a \mid b$ или $a \mid c$;
- ж) если $a \mid c$ и $b \mid c$, то $ab \mid c$;
- з) если $c \mid a$ и $c \mid a + b$, то $c \mid b$;
- и) если a делится на $a - b$, то b делится на $a - b$

3 Незнайка проверял делимость чисел на 13. У него получилось, что числа 1234567891011 и 1234567891085 делятся на 13, а 1234567891037 и 1234567891050 — не делятся.

- а) Докажите, что Незнайка совершил хотя бы одну ошибку.
- б) Зная, что Незнайка ошибся насчёт трёх чисел из четырёх, определите, какие из данных чисел делятся на 13.

4 Пусть m, n — целые, и $11 \mid 5m + 3n$. Докажите, что

- а) $11 \mid 10m + 6n$; б) $11 \mid 6m + 8n$.

5 Лешие выходят из леса парами. В каждой паре идет леший-мальчик и леший-девочка, причем у мальчика либо в два раза больше веток, либо в два раза меньше веток, чем у девочки. Может ли всего у леших быть 100 веток?

6 Известен такой фокус. Возьмём любое трёхзначное число, запишем его дважды, полученное шестизначное число разделим на 7, частное разделим на 11, новое частное разделим на 13 — в результате получается исходное число. В чём секрет этого фокуса?

- 7** Докажите, что а) $\overline{aaa}$ делится на 37;
- б) $\overline{abc} - \overline{cba}$ делится на 99 (где a, b, c — цифры).

8 а)° Докажите, что целое число делится на 4 тогда и только тогда, когда две его последние цифры образуют число, кратное 4.

б)° Найдите и докажите признаки делимости на 2, 5, 8, 10.

9 а) Из натурального числа $\overline{a_n \dots a_1 a_0}$ вычли сумму его цифр $a_n + \dots + a_1 + a_0$. Докажите, что получилось число, делящееся на 9.

б)° Выведите из пункта а) признаки делимости на 3 и на 9.

10 а) Верно ли, что, если число делится на 27, то сумма цифр делится на 27?

б) Верно ли обратное?

11 Переставив цифры в числе N , получили в 3 раза меньшее число. Докажите, что $27 \mid N$.

- 12** а) Целые числа a и b различны. Докажите, что б) $(a - b) \mid (a^3 - b^3)$;
- в) $(a - b) \mid (a^n - b^n)$ при любом натуральном n . Чему равно частное?

13 Найдите все целые n , при которых будет целым число

а) $\frac{4}{n+2}$; б) $\frac{n+3}{n-3}$; в) $\frac{n^2+2}{n+2}$.

14 Решите в натуральных числах: а) $x^2 - y^2 = 31$; б) $x^2 - y^2 = 27$.

Определение 3. Натуральное число $p > 1$ называется простым, если оно имеет ровно два натуральных делителя: 1 и p , в противном случае оно называется составным.

15° Докажите, что любое натуральное число, большее 1, либо само простое, либо раскладывается в произведение нескольких простых множителей.

16 а) Даны целые числа $a_1, \dots, a_n$, большие 1. Придумайте целое число, большее 1, которое не делится ни на одно из чисел $a_1, \dots, a_n$.

б)° Докажите, что простых чисел бесконечно много.

в) Докажите, что простых чисел вида $3k + 2$ бесконечно много (k — натуральное).

17 а)° Могут ли 100 последовательных натуральных чисел все быть составными?

б)° Найдутся ли 100 последовательных натуральных чисел, среди которых ровно 5 простых?

18 а) Докажите, что числа $\frac{m(m+1)}{2}$ и $\frac{m(m+1)(m+2)}{6}$ целые при любом натуральном m .

б)° Докажите, что произведение любых n последовательных целых чисел делится на $n!$.

в) Числа a, b, c, d — натуральные. Обязательно ли число $\frac{(a+b+c+d)!}{a!b!c!d!}$ целое?

19 У двух натуральных чисел равны суммы делителей и суммы обратных величин к делителям. Докажите, что и сами числа равны.

20 Рассмотрим $n + 1$ число от 1 до $2n$. Докажите, что среди них найдется пара чисел, одно из которых делится на другое

21 Даны N различных натуральных чисел. Докажите, что любое натуральное число, делящееся на все эти числа, хотя бы в N раз больше наименьшего из них. (Подсказка: решение очень простое.)