

9. ИНДУКЦИЯ

Примеры рассуждений

Начнём с разбора трёх примеров.

1. Имеет ли уравнение $2m^2 = n^2$ решения в натуральных числах?

Докажем от противного, что это уравнение не имеет решений в натуральных числах. Пусть

$$m_0 \in \mathbb{N}, n_0 \in \mathbb{N} \text{ и } 2m_0^2 = n_0^2.$$

Левая часть этого равенства делится на 2, значит, правая часть тоже чётна. Тогда число n_0 чётно, так как квадрат нечётного числа был бы нечётным. Значит, $n_0 = 2n_1$, где $n_1 \in \mathbb{N}$. Тогда

$$2m_0^2 = (2n_1)^2 \Leftrightarrow 2m_0^2 = 4n_1^2 \Leftrightarrow m_0^2 = 2n_1^2.$$

Следовательно, m_0 — чётно, значит $m_0 = 2m_1$. Подставляя в уравнение еще раз, получим

$$(2m_1)^2 = 2n_1^2 \Leftrightarrow 2m_1^2 = n_1^2.$$

Таким образом, для любого решения $(m; n)$ пара $m_1 = m_0/2, n_1 = n_0/2$ также является решением уравнения. С парой $(m_1; n_1)$ можно проделать ту же операцию сколько угодно раз и получить, что для любого $k \in \mathbb{N}$ пара $m = \frac{m_0}{2^k}, n = \frac{n_0}{2^k}$ является решением нашего уравнения. Тогда m_0 делится на любую натуральную степень двойки. Но такого числа не существует. Получаем противоречие. Значит, предположение неверно, и уравнение не имеет решений в натуральных числах. $\square$

2. Докажите, что уравнение $2m^2 = n^2$ не имеет решений в натуральных числах.

Снова будем рассуждать от противного. Выберем из всех решений этого уравнения в натуральных числах то, в котором сумма $n + m$ — наименьшая. Пусть это решение $m_* \in \mathbb{N}, n_* \in \mathbb{N}$ и $2m_*^2 = n_*^2$. Точно так же, как в первом решении, получаем, что число n_* чётно, так как квадрат нечётного числа был бы нечётным. Значит, $n_* = 2n_1$, где $n_1 \in \mathbb{N}$. Тогда наше уравнение переписывается в виде

$$2m_*^2 = (2n_1)^2 \Leftrightarrow 2m_*^2 = 4n_1^2 \Leftrightarrow m_*^2 = 2n_1^2,$$

тогда получаем, что $m = n_1, n = m_*$ — решение уравнения с меньшей суммой $m + n = m_* + n_*/2$, что противоречит минимальности выбранного нами решения. Значит, наше предположение неверно, и уравнение не имеет решений в натуральных числах. $\square$

В примерах 1 и 2 мы воспользовались *методом бесконечного спуска* и *принцип крайнего*:

Пусть для каждого натурального числа, обладающего некоторым свойством, есть меньшее натуральное число, обладающее тем же свойством. Тогда ни одно число им не обладает.

3. На плоскости проведено $n \geq 3$ прямых, причем никакие 2 не параллельны, а никакие 3 не проходят через 1 точку. Докажем, что среди частей, на которые они делят плоскость, есть треугольник.

1) Начнём с простейшего случая. Если прямых всего три, то каждая пересекается с двумя другими, и получаются три точки пересечения. Это и есть вершины нашего треугольника.

2) Теперь перейдём к общему случаю. Допустим, мы уже доказали, почему среди частей, на которые делят плоскость любые n таких прямых, всегда есть треугольник. Рассмотрим конфигурацию из $n + 1$ прямой. Выберем одну из них и мысленно уберём с рисунка. Тогда остаётся картинка из n прямых, а в ней, по нашему предположению, есть треугольная область.

Вернём убранный прямую обратно. Если она не пересекает наш треугольник, он остаётся одной из частей на новом рисунке. В противном случае она обязана пересечь две его стороны. А значит, она отсекает от одного из углов новый треугольник.

3) Таким образом, как только мы знаем, что треугольная часть существует для n прямых, мы сразу можем понять, почему она существует и для $n + 1$ прямой. Теперь, начиная с трёх прямых и повторяя это рассуждение раз за разом, мы докажем утверждение для любого $n \geq 3$. $\square$

В примере 3 использован *метод математической индукции*:

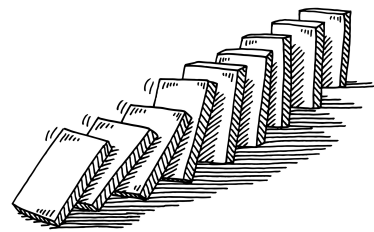
Пусть для каждого натурального числа n задано *утверждение индукции*, которое мы обозначаем через A_n .

Предположим, что выполнены два условия.

1) Первое утверждение A_1 доказано (*база индукции*)

2) Для каждого n доказано, что из истинности утверждения A_n следует истинность A_{n+1} (*шаг индукции*)

Тогда каждое утверждение A_n верно для всех натуральных n .



-5 Докажите, что длина n -звенной ломаной на плоскости больше или равна длинны отрезка, соединяющего её концы.

-4 Докажите, что

а) $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$; **б)** $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

-3 Докажите, что $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}$.

-2 Несколько прямых делят плоскость на части. Докажите, что можно раскрасить их в белый и чёрный цвет так, чтобы части, имеющие общий отрезок границы, были разного цвета.

-1 Докажите, что для любого натурального числа n любой треугольник можно разрезать на n прямоугольных треугольников

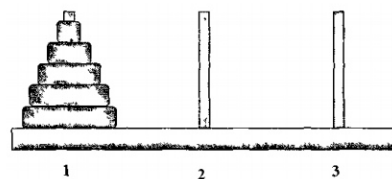
0° Докажите одну из задач этого листа **а)** методом бесконечного спуска;

б) принципом крайнего; **в)** методом математической индукции.

1° На какую максимальную степень тройки делится число $11 \dots 11$ из 81 единицы?

2° Известно, что $a_1 = 1$ и $a_{n+1} = 2a_n + 1$ при $n > 1$. Найдите a_8 .

3° Игра «Ханойская башня» имеет три стержня. На одном находится пирамидка из восьми колец (уменьшающихся снизу вверх). Эту пирамидку нужно переложить на другой стержень, соблюдая правила игры: нельзя переносить сразу несколько колец и нельзя класть большее кольцо поверх меньшего.

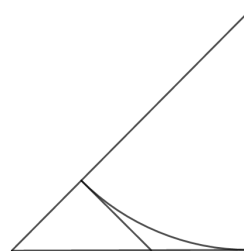


а) Докажите, что в игре можно победить.

б) Какое наименьшее число ходов для этого потребуется?

4° Докажите, что любое натуральное число можно представить как сумму нескольких разных степеней двойки (возможно, включая и нулевую).

5 Два отрезка называют *соизмеримыми*, если существует такой отрезок, который откладывается на каждом из них целое число раз. Докажите, что у равнобедренного прямоугольного треугольника катет и гипотенуза не соизмеримы. В качестве подсказки можно использовать картинку справа.



6° Найдите ошибку в доказательстве утверждения A_n .

а) A_n : «Если треугольник разбит на n $\triangle$ -ов, то хотя бы один из них не остроугольный»

База. A_2 верно, так как если треугольник разбит на два треугольника, то пара углов этих треугольников дополняют друг друга до развернутого, так что один из них не острый.

Шаг. Рассмотрим треугольник, разбитый на n треугольников. Разобьем один из них на два. Так как один из двух новых треугольников не остроугольный, утверждение A_{n+1} выполнено. ☐

б) A_n : «Любые n точек лежат на одной прямой»

База. A_1 и A_2 верны, так как по аксиоме планиметрии любые две точки лежат на одной прямой.

Шаг. Рассмотрим произвольные точки $p_1, \dots, p_{n+1}$. По предположению индукции, первые n точек лежат на некоторой прямой l . Аналогично, последние n точек лежат на прямой l' . Так как l и l' пересекаются в точках p_2 и p_n , они совпадают. Значит, $p_1, \dots, p_{n+1}$ лежат на одной прямой. ☐

в) A_n : «Если в связном графе с n вершинами степень каждой вершины не меньше 2, то при удалении каждого ребра он останется связным»

База. Аз верно, так как при удалении ребра из треугольника он остается связным.

Шаг. Рассмотрим граф с n вершинами и добавим у нему еще одну. Если из неё выходит хотя бы два ребра, то при удалении любого из них вершина остаётся соединённой со старым графом. При удалении ребра из старого графа он остаётся связным по предположению индукции. $\square$

7° Найдите число последовательностей из нулей и единиц длины 10 без двух нулей подряд.

8 Рассмотрим произведение скобок $(a + b - c)(d + e - f)(g + h - i) \dots$, где переменные в скобках не повторяются и в каждой скобке два плюса и один минус. Сколько получится членов и перед сколькими стоит знак минус, если в произведении n скобок?

9 Найдите ошибку в следующем доказательстве. На плоскости нарисовано несколько треугольников. Любые два треугольника пересекаются либо по вершине, либо по стороне. Отметим их стороны и вершины, объединение треугольников связно. Известно, что для любой вершины количество выходящих из неё отмеченных отрезков равно или на 1 больше количества выходящих из неё треугольников. Пусть треугольников t , отмеченных отрезков e , точек v . Требуется доказать, что $t - e + v = 1$.

Докажем по индукции по количеству треугольников. База для одного треугольника очевидна. Сведём утверждение для n треугольников к утверждениям для меньшего количества треугольников.

Рассмотрим отмеченную точку на границе фигуры. Если из неё выходит один треугольник, отрежем его. Для получившейся фигуры утверждение выполняется по предположению индукции. Количество треугольников и точек уменьшилось на 1, а отрезков — на два, так что утверждение выполняется и для исходной фигуры.

Если из точки выходит больше одного треугольника, пойдём по какому-нибудь из выходящих из точки отмеченных отрезков, не лежащих на границе фигуры. Если мы не пришли на границу, пойдём дальше по какому-нибудь другому отмеченному отрезку, выходящему из точки, в которую мы пришли, и так далее, пока не придём на границу. Разрежем фигуру по этому пути. Пусть параметры получившихся частей равны t_1, e_1, v_1 и t_2, e_2, v_2 , а на получившемся пути k отмеченных точек, то есть $k - 1$ отрезок. Тогда параметры исходной фигуры равны $t_1 + t_2, e_1 + e_2 - (k - 1)$ и $v_1 + v_2 - k$, так как у двух частей k общих точек и $k - 1$ отрезок. Тогда из утверждений для двух частей следует утверждение для всей фигуры. $\square$

10 Из квадрата 64×64 вырезана верхняя левая угловая клетка. Разрежьте эту фигуру на трехклеточные уголки ($\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix} \square & \square \\ & \square \end{smallmatrix}$ и $\begin{smallmatrix} \square & \\ \square & \square \end{smallmatrix}$) некоторым образом.

а) Сколько уголков при этом получится?

б) Каких уголков будет больше, $\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}$ или $\begin{smallmatrix} \square & \square \\ & \square \end{smallmatrix}$? На сколько?

в) Сколько уголков каждого из четырех типов получится?

11 На столе лежит несколько кучек конфет. Каждый ход Петя выбирает две кучки и откладывает их. Если получилось нечётное число конфет, Петя съедает одну. После этого он делит отложенные конфеты на две равные кучки и выкладывает на стол к остальным кучкам. Петя побеждает, если в итоге в каждой кучке останется по одной конфете.

а) Сможет ли он победить, если на столе десять кучек, в которых 1, 2, ... и 512 конфет?

б) Предположим, что на столе лежат девять кучек с 1 конфетой и одна с k конфетами. При каком наибольшем k Петя сможет победить?

12 По кругу расположены 2025 точек, занумерованных по часовой стрелке. Петя начинает последовательно вычеркивать точки, начиная с 2, по следующему правилу. Каждый раз он переходит к следующей не вычеркнутой точке, пропускает её и вычеркивает следующую за ней не вычеркнутую точку. Так продолжается до тех пор, пока не останется одна точка. Какой у нее будет номер?

13° Максимальная степень вершины графа равна n . Докажите, что вершины графа можно покрасить в $n + 1$ цвет так, что смежные вершины будут покрашены в разные цвета.

14 В стране любые два города соединены дорогой с односторонним движением.

а) Докажите, что в этой стране есть город, из которого можно добраться в любой другой.

☐ б) Докажите, что всегда можно поменять направление не более чем одной дороги так, чтобы от любого города можно было доехать до любого другого.

☐ в) Докажите, что города можно пронумеровать так, чтобы из каждого города вела прямая дорога в следующий.

☐ 15 Автомобиль с заполненным баком может проехать всё кольцевое шоссе целиком. Вдоль шоссе расположено несколько бензоколонок, суммарного количества бензина в которых хватит, чтобы заполнить бак. Докажите, что существует бензоколонка, стартовав с которой можно проехать всё шоссе.

☐ 16 Докажите, что любой связный граф можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги, причем провести по каждому ребру ровно два раза.

☐ 17° Рассмотрим связный граф, в котором степени всех вершин чётны.

☐ а) Пусть рёбра графа ориентированы так, что для каждой вершины число входящих рёбер равно числу исходящих. Докажите, что от каждой вершины можно добраться до каждой, двигаясь по ребрам в направлении стрелок.

☐ б) Докажите, что можно обойти этот граф и пройти по каждому ребру ровно один раз.

☐ 18 Шеренга новобранцев стоит перед старшиной. Он командует “налево”. Часть солдат поворачивается налево, а часть — направо. После этого каждую секунду происходит следующее: солдаты, оказавшиеся друг к другу лицом понимают, что произошла ошибка, и поворачиваются кругом.

☐ а) Доказать, что рано или поздно солдаты встанут так, что поворачиваться будет не нужно.

☐ б) Какое наибольшее время для этого потребуется?

☐ 19* Двое играют в игру, исход которой не зависит от случая. Игроки ходят по очереди, причём по правилам игра продолжается не более n ходов. Ничьих не бывает. Докажите, что у одного из игроков есть выигрышная стратегия.

☐ 20 ☐ а) Бизнесмен заключил с чёртом такую сделку: он может любую имеющуюся у него купюру обменять у чёрта на любой набор купюр любого меньшего достоинства (по своему выбору, без ограничения общей суммы). Он может также тратить деньги, но не может получать их в другом месте (кроме как у чёрта). При этом каждый день на еду ему нужен рубль. Сможет ли он так жить бесконечно долго?

☐ б*) Лернейская гидра — любое конечное дерево, растущее из одного корня. Количество «сыновей» каждой вершины не ограничено (но конечно), равно как и высота дерева.

Битва между Гераклом и гидрой проводится дискретными ходами. На каждом ходу Геракл отрубает одну из голов гидры (т.е. разрешается рубить только листья дерева).

Если у отрубленной головы нет «дедушки», т.е. эта голова — корень или вершина, выходящая из корня, то ничего не происходит и мы переходим к следующему ходу. Если же у вершины есть «дедушка», то после того, как Геракл её отрубил, у гидры вырастают, из «дедушки», некоторое конечное число точных копий дерева начиная с «отца» отрубленной головы.

Докажите, что, как бы не действовал Геракл, в конечном счете от отрубит гидре все головы;

☐ в*) Рассмотрим *наследственное представление*: число записывается как сумма степеней n , но при этом *все показатели степеней* также рекурсивно переписываются в представлении по основанию n . Этот процесс продолжается до тех пор, пока все числа в записи не станут меньше или равны n .

Пример для числа 100:

- Обычная запись (база 3): $100 = 3^4 + 2 \cdot 3^2 + 1$
- Наследственная запись (база 3): Так как показатель 4 можно записать как $3^1 + 1$, итоговая запись принимает вид: $100 = 3^{3+1} + 2 \cdot 3^2 + 1$

Для любого начального натурального числа m строится последовательность Гудстейна $\{G_m(k)\}$. Начальное значение $G_m(1) = m$. Чтобы получить следующий член последовательности из $G_m(n)$ (где n — текущее основание, начинающееся с 2), выполняются три шага:

1. **Запись:** Записать число $G_m(n)$ в наследственной базе n .
2. **Замена основания:** Заменить каждое вхождение числа n на $n + 1$.
3. **Вычитание:** Вычесть из полученного результата 1.

Для любого начального натурального числа m докажите, что последовательность Гудстейна достигает нуля за конечное число шагов.