

6. ГРАФЫ

Словарик по теории графов

- **Граф** — это набор точек и соединяющих их линий. Точки называются **вершинами**, линии — **рёбрами**.¹
- **Степень вершины** $\deg v$ — это число рёбер, которые из неё выходят.
- **Полный граф** K_n — граф с n вершинами, в котором каждые две вершины соединены ребром.
- Графы называются **изоморфными**, если можно занумеровать их вершины так, чтобы выполнялось условие: если две вершины в первом графе соединены ребром, то и во втором графе вершины с этими же номерами соединены ребром, и наоборот.

1° В шахматном турнире участвовали семь школьников. Известно, что Миша сыграл 6 партий, Коля — 5, Илья и Гриша — по три, Андрей и Сева — по две, а Максим — одну. С кем сыграл Илья? Никакие два школьника не играли друг с другом больше одного раза.

2° На День рождения к Андрею пришли Вася, Глеб, Даша, Митя, Петя, Соня и Тимур. Сколько есть способов всех восьмерых ребят рассадить за круглый стол, чтобы у любых двух, сидящих рядом, в именах встречались одинаковые буквы?

3° Разбейте графы, изображённые на рисунке ниже, на группы изоморфных.

4° В углах шахматной доски 3×3 стоят 4 коня: два белых (в соседних углах) и два чёрных. Можно ли за несколько ходов (по шахматным правилам) поставить коней так, чтобы во всех соседних углах стояли кони разного цвета?

5° Нарисуйте все неизоморфные друг другу графы с не более чем четырьмя вершинами.

6° Сколько всего существует графов с n пронумерованными вершинами? Имеется в виду, что граф Γ_1 с тремя вершинами 1, 2 и 3 и двумя рёбрами, соединяющими вершину 2 с вершинами 1 и 3, и граф Γ_2 с тремя вершинами 1, 2 и 3 и двумя рёбрами, соединяющими вершину 3 с вершинами 1 и 2, считаются различными.

7° Рассмотрим для каждой шахматной фигуры граф, вершины которого — это все клетки доски 8×8 , а рёбра — пары клеток, связанных одним ходом этой фигуры. Сколько всего рёбер в графе

а) ладьи; б) короля.

8° В двух графах одинаково число рёбер и число вершин и, более того, наборы степеней вершин одинаковы. Означает ли это, что графы изоморфны?

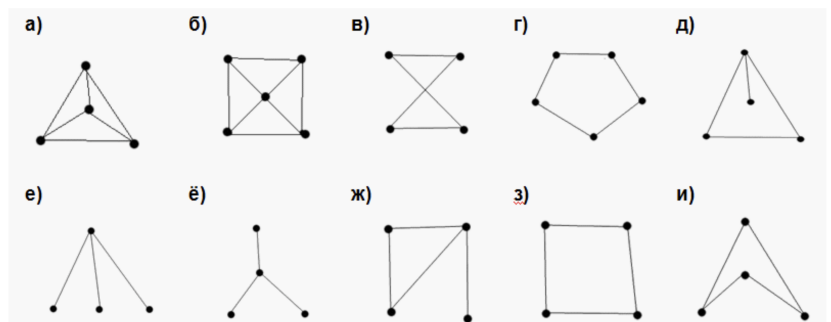
9 Сколькими способами можно соединить 5 городов четырьмя дорогами так, чтобы по ним можно было бы добраться от каждого города до каждого?

10 Можно ли покрасить плоскость в а) 3; б) 7 цветов так, чтобы любые две точки на расстоянии 1 были разного цвета?

11 В математическом классе 24 девочки и один мальчик. Могло ли оказаться, что у

а) всех девочек в этом классе разное количество друзей?

б) всех в этом классе разное количество друзей?



¹В листке мы работаем с простыми графами: без петель (рёбер из вершины в саму себя) и без кратных рёбер (двух и более рёбер между одной и той же парой вершин). В математике встречаются и графы с петлями/кратными рёбрами.

12 Однажды 10 кружковцев образовали дежурную команду для решения домашних задач. Каждый вечер в команду либо добавляется один человек, либо из неё исключается один человек. Можно ли будет перебрать все допустимые составы команды ровно по одному разу?

13 **а)** Сколько есть способов раскрасить вершины графа (а) на картинке на первой странице листка в n цветов так, чтобы каждые две вершины, соединённые ребром, были разных цветов?

б) Ответьте на тот же вопрос для каждого из графов на этой картинке.

в*) Докажите, что для любого графа ответ на такой вопрос можно представить в виде многочлена, зависящего от n . (Он называется *хроматическим многочленом* графа).